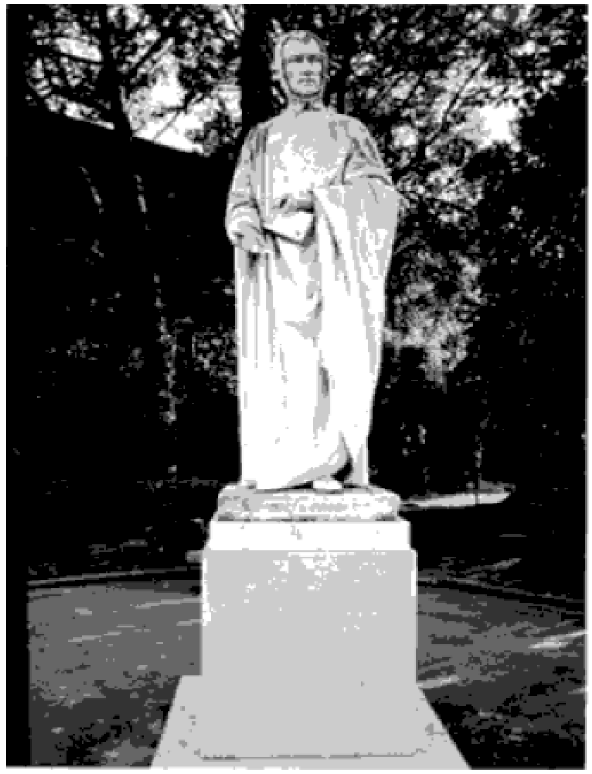
## Урок 16: Введение в мир Фибоначчи



**Статуя Леонардо Фибоначчи, Пиза, Италия.
Надпись гласит: "A. Leonardo Fibonacci, Insigne
Matematico Piisano del Secolo XII."**

### ИСТОРИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ЗАКОНА ВОЛН

Последовательность чисел Фибоначчи была открыта (на самом деле, повторно) Леонардо Фибоначчи де Пиза, математиком тринадцатого века (в России известен как *Леонардо Пизанский**). Мы обрисуем исторические предпосылки этого удивительного человека и затем более полно обсудим последовательность (формально, это действительно последовательность, а не ряд) чисел, которая носит его имя. Когда Эллиотт писал *Закон Природы,* он в частности ссылался на последовательность Фибоначчи, как математическую основу Закона волн. Здесь достаточно сказать, что фондовый рынок имеет склонность демонстрировать очертание, которое можно сравнить с фигурой, присутствующей в последовательности Фибоначчи. {Для дальнейшего обсуждения такой математики вне рамок Закона волн см. "Mathematical Basis of Wave Theory" («Математическая основа волновой теории») Уолтера Уайта (Walter E. White).}

В начале 1200х, Леонардо Фибоначчи из Пизы, Италия, опубликовал свою знаменитую *Liber Abacci* {*Книга абака* (Книга вычислений); абак(а) – счеты*}, которая представила Европе одно из величайших открытий всех времен, а именно десятичную систему счисления, включающую положение нуля в качестве первой цифры в записи числового ряда. Эта система, которая включала привычные символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, стала известной как Индусско-Арабская система и сейчас используется повсеместно.

С истинной числовой или зависимой от положения цифр системой, подлинное значение, представленное любым символом, помещенным в ряд с другими символами, зависит не только от его основного цифрового значения, но также и от его положения в этом ряду, т.е. 58 имеет отличное от 85 значение. Хотя тысячами лет ранее Вавилонцы и Майя из Центральной Америки независимо друг от друга изобрели числовую или зависимую от положения цифр систему счисления, их методы были неудобными в других отношениях. По этой причине Вавилонская система, которая первая использовала нуль и положение цифр, не вошла ни в греческую, ни даже в римскую системы, чьи нумерации заключали в себе семь символов I, V, X, L, C, D и M с нецифровыми (но числовыми*) значениями присвоенными этим символам. Сложение, вычитание, умножение и деление в системе, использующей эти нецифровые символы, является нелегкой задачей, когда используются большие числа. Пародоксально, но чтобы решить эту проблему римляне использовали очень древний вычислительный прибор, известный как счеты. Так как этот прибор основан на цифрах и содержит в себе нулевой принцип, он действовал в качестве необходимого дополнения к римской вычислительной системе. В течение веков счетоводы и купцы зависили от помощи счет в механике их задач. Фибоначчи, после выражения основного принципа счет в *Книге абака,* начал использовать свою новую систему во время своих путешествий. Посредством его усилий новая система с ее простым способом вычисления, в конце концов, была передана Европе. Постепенно старое использование римских цифр было заменено арабской цифровой системой. Введение новой системы в Европу было первым важным достижением в области математики с момента падения Рима более семи веков назад. Фибоначчи не только сохранил математику в Средневековье, но и заложил основу длительной эволюции в области высшей математики и связанных областях физики, астрономии и машиностроения. Хотя мир позже почти потерял Фибоначчи из вида, он, несомненно, был человеком своего времени. Его известность была таковой, что Фредерик II, естествоиспытатель и ученый по праву, разыскал его, организовав поездку в Пизу. Фредерик II был Императором Священного Рима, Королем Сицилии и Иерусалима, потомком двух самых знатных семей в Европе и Сицилии и наиболее могущественным правителем своего времени. Его стремлением была абсолютная монархия, и он окружал себя со всей помпой Римского императора.

Встреча между Фибоначчи и Фредериком II произошла в 1225 году и была событием большой важности для города Пизы. Император ехал верхом во главе длинной процессии трубачей, придворных, рыцарей, чиновников и бродячего зверинца животных. Некоторые проблемы, которые Император поставил перед знаменитым математиком, подробно изложены в *Книге абака*. Фибоначчи, очевидно, решил проблемы, поставленные Императором, и навсегда стал желанным гостем при Королевском дворе. Когда Фибоначчи перерабатывал *Книгу абака* в 1228 году, он посвятил исправленную редакцию Фредерику II.

Будет почти преуменьшением, если сказать, что Леонардо Фибоначчи был величайшим математиком Средневековья. Всего он написал три значительных математических труда: *Книга абака*, опубликованная в 1202 году и переизданная в 1228 году, *Практическая геометрия*, опубликованная в 1220 году, и *Книга квадратур*. Как указано в документах 1240 года, восхищенные граждане Пизы говорили, что он был «рассудительный и эрудированный человек», а не так давно Жозеф Гиз (Joseph Gies), главный редактор Британской Энциклопедии заявил, что будущие ученые во все времена «будут отдавать свой долг Леонардо Пизанскому, как одному из величайших интеллектуальных первопроходцев мира». Его работы после долгих лет только сейчас переводятся с латинского языка на английский. Для тех, кто интересуется - книга, названная *Ленардо Пизанский и новая математика Средних веков* Жозефа и Франца Гиз (Joseph and Frances Gies) является прекрасным трактатом по веку Фибоначчи и его работам.

Хотя он и был величайшим математиком средних веков, единственные памятники Фибоначчи – это статуя напротив Пизанской башни через реку Арно и две улицы, которые носят его имя, одна – в Пизе, а другая – во Флоренции. Кажется странным, что так мало посетителей к 179-ти футовой Падающей башне когда-либо слышали о Фибоначчи или видели его статую. Фибоначчи был современником Бонанна (Bonanna), архитектора Пизанской башни, строительство которой тот начал в 1174 году. Оба они сделали вклад в мировую историю, но один, чей вклад намного превосходит другого, почти неизвестен.

**Последовательность Фибоначчи**

В *Книге абака* одна из поставленных проблем дает начало последовательности чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 и так далее до бесконечности, известной сегодня как последовательность Фибоначчи. А проблема такова:

> Сколько пар кроликов, помещенных в загон, может быть произведено за один год из одной пары кроликов, если каждая пара производит еще одну пару каждый месяц, начиная со второго?

В поисках решения, мы находим, что каждой паре, включая первую, необходим месяц для достижения зрелости, но, начав воспроизводство, они производят на свет новую пару каждый месяц. Количество пар остается тем же в начале каждого из двух первых месяцев, то есть, последовательность – 1, 1. Эта первая пара, наконец, удваивает свое количество во втором месяце, так что в начале третьего месяца у нас уже две пары. Из них старшая пара производит третью пару, так что в начале четвертого месяца последовательность увеличивается до 1, 1, 2, 3. Из этих трех две старшие пары, но не младшая, воспроизводятся так, что последовательность увеличивается до 1, 1, 2, 3, 5, 8 и так далее. Рис.3-1 показывает семейное дерево Кроликов, разрастающееся с логарифмической прогрессией. Продолжите последовательность в течение нескольких лет и количество станет астрономическим. Через 100 месяцев, например, мы вынуждены будем бороться с 354 224 848 179 261 915 075 парами кроликов. Последовательность Фибоначчи, проистекающая из кроличьей проблемы, обладает множеством интересных свойств и показывает почти постоянное соотношение среди своих компонентов.

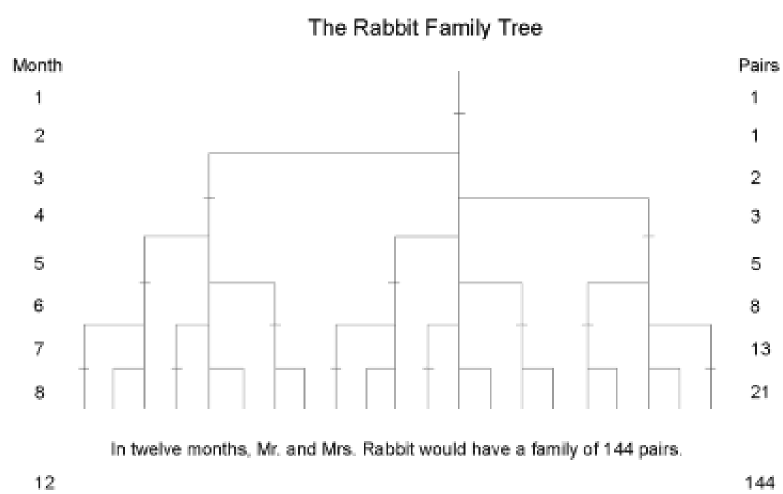



**Рисунок 3-1**

> The Rabbit Family Tree – Семейное дерево Кроликов
> Month – Месяц
> Pairs - Пары
> Подпись - Через 12 месяцев мистер и миссис Кролик имели бы семью из 144 пар.

Сумма любых чисел, расположенных рядом в последовательности, дает следующее число последовательности, а именно 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8 и так далее до бесконечности.

**Золотая пропорция**

После первых нескольких чисел в последовательности, отношение любого числа к следующему старшему равна примерно 0.618 к 1, а к соседнему младшему – приблизительно 1.618 к 1. Чем дальше вдоль последовательности, тем ближе отношение приближается к фи (φ*), которое является иррациональным числом 0.618034… Соотношение между числами, расположенными через одно в последовательности, приблизительно равно 0.382, что является инверсией от 2.618 (1:2.618*). Обратитесь к таблице соотношений всех чисел Фибоначчи от 1 до 144 (рис.3-2).

*Fibonacci Ratio Table*

| DENOMINATOR \ NUMERATOR | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 2.00 | 3.00 | 5.00 | 8.00 | 13.00 | 21.00 | 34.00 | 55.00 | 89.00 | 144.00 |
| 2 | .50 | 1.00 | 1.50 | 2.50 | 4.00 | 6.50 | 10.50 | 17.00 | 27.50 | 44.50 | 72.00 |
| 3 | .333 | .667 | 1.00 | 1.667 | 2.667 | 4.33 | 7.00 | 11.33 | 18.33 | 29.67 | 48.00 |
| 5 | .20 | .40 | .60 | 1.00 | 1.60 | 2.60 | 4.20 | 6.80 | 11.00 | 17.80 | 28.80 |
| 8 | .125 | .25 | .375 | .625 | 1.00 | 1.625 | 2.625 | 4.25 | 6.875 | 11.125 | 18.00 |
| 13 | .077 | .154 | .231 | .385 | .615 | 1.00 | 1.615 | 2.615 | 4.23 | 6.846 | 11.077 |
| 21 | .0476 | .0952 | .1429 | .238 | .381 | .619 | 1.00 | 1.619 | 2.619 | 4.238 | 6.857 |
| 34 | .0294 | .0588 | .0882 | .147 | .235 | .3824 | .6176 | 1.00 | 1.618 | 2.618 | 4.235 |
| 55 | .01818 | .03636 | .0545 | .0909 | .1455 | .236 | .3818 | .618 | 1.00 | 1.618 | 2.618 |
| 89 | .011236 | .02247 | .0337 | .05618 | .08989 | .140 | .236 | .382 | .618 | 1.00 | 1.618 |
| 144 | .006944 | .013889 | .0208 | .0347 | .05556 | .0903 | .1458 | .236 | .382 | .618 | 1.00 |

*Toward perfect ratios*

**Рисунок 3-2**

Фи является единственным числом, которое после сложения с 1 дает свою же инверсию: 0.618+1=1:0.618. Такой альянс аддитивных и мультипликативных свойств порождает следующую последовательность равенств:

$0.618^2 = 1 - 0.618$,
$0.618^3 = 0.618 - 0.618^2$,
$0.618^4 = 0.618^2 - 0.618^3$,
$0.618^5 = 0.618^3 - 0.618^4$, и т.д.

или, альтернативно:

$1.618^2 = 1 + 1.618$,
$1.618^3 = 1.618 + 1.618^2$,
$1.618^4 = 1.618^2 + 1.618^3$,
$1.618^5 = 1.618^3 + 1.618^4$, и т.д.

Некоторые формулировки из взаимосвязанных свойств этих четырех соотношений могут быть представлены следующим образом:

1) 1.618 - 0.618 = 1,
2) 1.618 * 0.618 = 1,
3) 1 - 0.618 = 0.382,
4) 0.618 * 0.618 = 0.382,
5) 2.618 - 1.618 = 1,
6) 2.618 * 0.382 = 1,
7) 2.618 * 0.618 = 1.618,
8) 1.618 * 1.618 = 2.618.

Кроме 1 и 2, любое число Фибоначчи, умноженное на 4 и добавленное к некоторому выбранному числу Фибоначчи, дает еще одно число Фибоначчи:

3 * 4 = 12; + 1 = 13,
5 * 4 = 20; + 1 = 21,
8 * 4 = 32; + 2 = 34,
13 * 4 = 52; + 3 = 55,
21 * 4 = 84; + 5 = 89, и т.д.

Так как развивается новая последовательность, третья последовательность начинается с тех же чисел, которые добавлялись к произведению на 4. Это соотношение возможно, потому что коэффициент между числами Фибоначчи, отстоящими друг от друга через две позиции равен 4.236, где 0.236 является и инверсией этого коэффициента, и разностью с числом 4. Это непрерывное рядообразующее свойство отражается и в других соотношениях по этим же причинам.

1.618 (или 0.618) известно как Золотая пропорция или Золотое сечение. Его гармония приятна для глаз и является важным явлением в музыке, искусстве, архитектуре и биологии. Вильям Хоффер, написал для декабрьского номера 1975 года журнала *Smithsonian Magazine:*

> «…пропорция 0.618034 к 1 является математической основой для формы игральных карт и Пантеона, подсолнухов и раковин улиток, греческих ваз и спиральных галактик открытого космоса. Греки многое сделали в своем искусстве и архитектуре по этой пропорции. Они называли это «золотым сечением».

Абсурдные кролики Фибоначчи всплывают в самых неожиданных местах. Эти числа, бесспорно, являются частью мистической естественной гармонии, которая приятно осязается, приятно выглядит и даже приятно звучит. Музыка, например, основана на 8-ми нотной октаве. На фортепьяно это представлено 8 белыми клавишами и 5 черными – всего 13. Не случайно, что музыкальная гармония, которая, как кажется, приносит уху величайшее удовольствие, является мажорным шестизвучием. Нота E (ми*) звучит как соотношение 0.625 к ноте C (до*). Всего лишь на 0.006966 больше точного Золотого сечения, соотношения мажорного шестизвучия вызывают приятные колебания в улитке внутреннего уха – органа, который как раз имеет форму логарифмической спирали.

Непрерывное нахождение чисел Фибоначчи и золотой спирали в природе точно объясняет, почему пропорция 0.618034 к 1 так привлекательна в искусстве. Человек видит изображение жизни в искусстве, которое основано на золотом сечении.

Природа использует Золотое сечение в своих наиболее сокровенных строительных блоках и в наиболее продвинутых образцах, от таких мелких форм, как атомные структуры, микрокапилляры мозга и молекулы ДНК до таких огромных, как планетарные орбиты и галактики. Оно касается таких разнообразных явлений, как расположение квазикристаллов, планетарных расстояний и периодов обращения, отражения световых лучей от стекла, мозг и нервная система, музыкальная аранжировка и строение растений и животных. Наука быстро доказывает, в природе действительно существует основной закон пропорций. Между прочим, вы удерживаете предмет двумя из пяти ваших отростков (две руки, две ноги и голова*), которые имеют три шарнирно соединенных части (плечо, предплечье и кисть*), пять отростков на концах (пальцы*) с тремя шарнирно соединенными частями (фаланги пальцев*). (Авторы намекают на волновую последовательность 5-3-5-3.*)

**Следующий урок: Геометрия Фибоначчи**